UNIVERSITE ABDELMALEK ESSADI
Ecoles National des Sciences Appliqués
Tétouan

Année universitaire 2010/2011
1ere année CP

TD de Physique 3
(Série 5)

Exercice 1

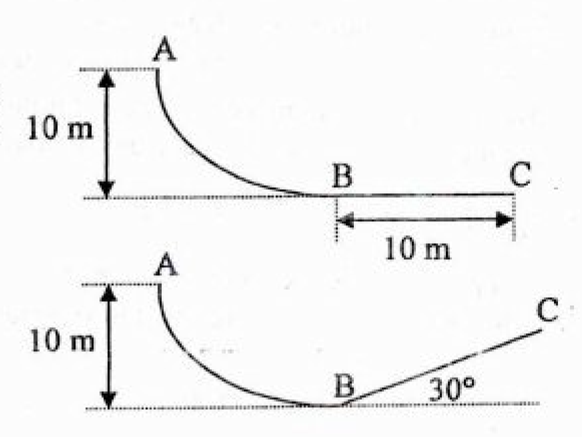
Une tige est destinée à tourner dans un plan horizontal Oxy avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\, \vec{e}_Z$. Sur cette tige dont l'une des extrémités coïncide avec O, d'axes Ox', se déplace une bille de masse m. Dans le repère R(Oxyz) du laboratoire considéré galiléen, l'équation de la trajectoire de la bille M, en coordonnées polaires est $r = r_0\ ch\ \theta$ avec $\theta = \omega t = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{OM})$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

1- Déterminer l'action $\vec{F}$ de la tige sur la bille, on choisira comme repère de projection le repère R'(Ox'y'z') lié à la tige. Conclure.
2- Dans R, calculer la puissance de cette force $\vec{F}$ et celle du poids $\vec{P}$
3- Calculer la puissance de ces deux forces dans la repère R' lié à la tige. Conclure.

Exercice 2

a) Une particule dont la masse est 5 Kg glisse le long du chemin ABC, BC étant horizontal. En A, sa vitesse est nulle, en B, v = 10 m/s, en C, sa vitesse est nulle.
Quel est le travail des forces de frottement lors du parcours AB ?
Quel est le travail des forces de frottement lors du parcours BC ?
Quel est le coefficient de frottement le long de BC ?

b) Si avec le même coefficient de frottement, le parcours BC est incliné de 30°, à quelle distance de B le corps va-t-il s'arrêter ?



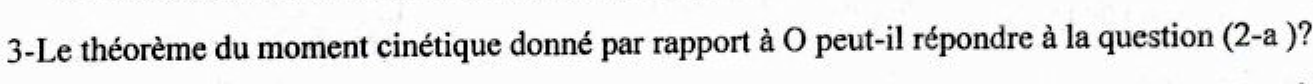
Exercice 3

Une particule M de masse m se déplace sans frottement sur une piste terminée par une boucle circulaire de rayon R. On la lâche sans vitesse initiale du point M_0 de côté z_0

1- En appliquant le théorème d'énergie cinétique, donner :
  a- La vitesse V_1 de la particule en M_1 .
  b- La vitesse V de la particule en fonction de z_0, R, θ et g, en M

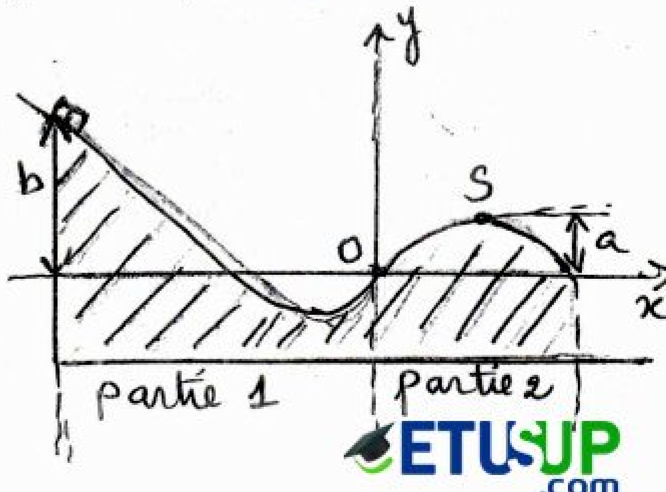
2- En appliquant le PFD et en projetant ce dernier sur l'axe passant par O et M et orienté de M vers O.
  a- Donner le module de la réaction R_N de la piste sur la particule en fonction de m, R, θ, g et z_0.
  b- En déduire alors la valeur de z_0 pour que la particule arrive en A.

z A M_0 O M θ M_1 x


3-Le théorème du moment cinétique donné par rapport à O peut-il répondre à la question (2-a)?

Exercice 4

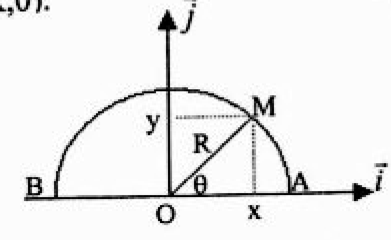
Une piste contenue dans un plan vertical a le profil décrit sur le schéma ci-contre. Le profil de la partie 2 de la piste a pour équation y = a sin (π x / l). Le chariot, assimilé à un point matériel, se déplace sur cette piste sans frottement. Le chariot est lancée sans vitesse initiale depuis le point A situé à une hauteur h au dessus de l'axe Ox.
Déterminer la valeur maximale de h pour laquelle le chariot ne décolle pas de la piste quand il passe au point S. Le rayon de courbure de la piste en S est égale à $l^2/(4\ \pi^2\ a)$



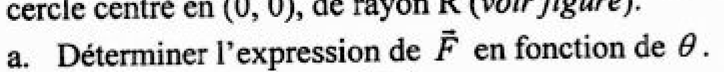
Exercice 5

Dans le plan fixe $(O,\vec{i},\vec{j})$, un point matériel M, dont la position est définie par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, est soumis à une force : $\vec{F} = k[(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}]$, avec $k > 0$.

1°) Calculer le travail $W_{A\to B}$ de cette force le long de l'axe $(O,\vec{i})$ de A(R,0) à B (-R,0).



2°) Le point M parcourt maintenant le trajet AB le long d'un demi cercle centré en (0, 0), de rayon R (*voir figure*).



a. Déterminer l'expression de $\vec{F}$ en fonction de θ.

b. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ puis $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ en fonction de θ.

c. Montrer, alors que le travail élémentaire de la force $\vec{F}$, s'écrit comme suit : $\delta W = f(\theta)\, d\theta$ avec f une fonction à déterminer

d. Calculer $W_{A\to B}$

3°) $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle. Déterminer $E_p(x,y)$ dans ce cas.

Exercice 6

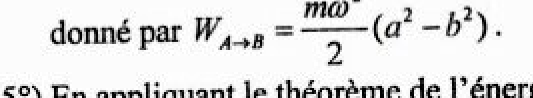
Un point matériel de masse m se déplace dans le plan xoy de façon que son vecteur position soit donné par : $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$ où a, b et ω sont des constantes positives telles que a > b.

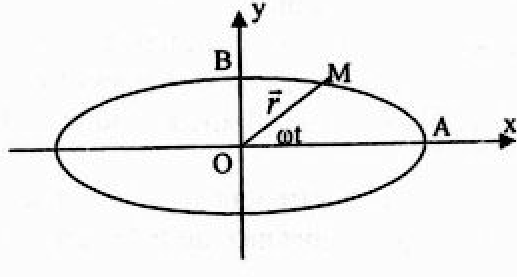
1°) Donner l'équation de la trajectoire.

2°) Calculer l'énergie cinétique en un point quelconque de la trajectoire.

3°) Montrer que le champ de forces est donné par $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$

4°) Montrer que le travail fourni par le champ de forces pour déplacer le point matériel de A à B (*voir figure*) est donné par $W_{A\to B} = \dfrac{m\omega^2}{2}(a^2 - b^2)$.





5°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et B, retrouver le résultat précédent.

6°) Montrer que l'énergie potentielle du système est donnée par :

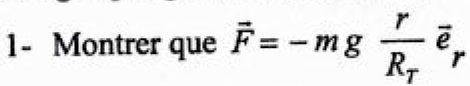
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$ à une constante près.

7°) Montrer que l'énergie mécanique du système est conservée (c. à. d. E_m= cte).

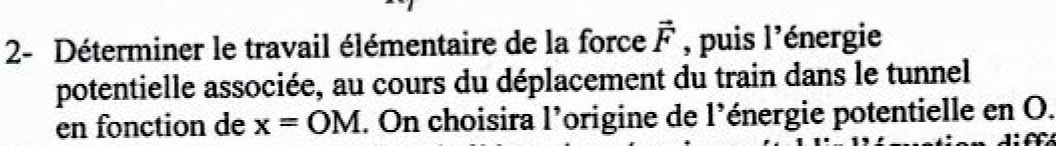
Exercice 7

On suppose que l'on a creusé à travers la terre un tunnel rectiligne très étroit entre un point L et un point P de la surface terrestre. La terre est supposé sphérique de rayon R_T et homogène de masse volumique ρ constante.
Un train assimilé à un point matériel M, de masse m, se déplace sans frottement le long du tunnel sous l'action de la seule force gravitationnelle : $\vec{F} = -G\dfrac{M(r)}{r^2}m\vec{e}_r$ où r est la distance du centre de la terre C au point M et M(r) la masse de la sphère de centre C et de rayon r.
On désigne par g l'accélération de pesanteur à la surface de la terre

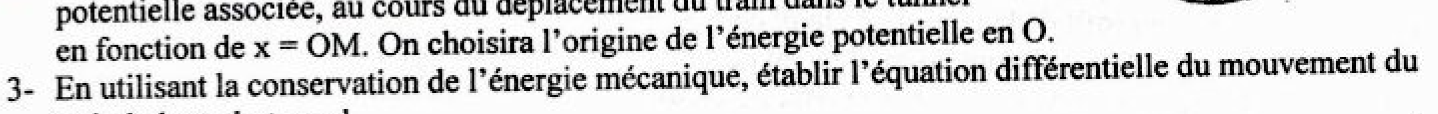
1- Montrer que $\vec{F} = -m\,g\,\dfrac{r}{R_T}\,\vec{e}_r$



2- Déterminer le travail élémentaire de la force $\vec{F}$, puis l'énergie potentielle associée, au cours du déplacement du train dans le tunnel en fonction de x = OM. On choisira l'origine de l'énergie potentielle en O.



3- En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement du train le long du tunnel



4- En déduire que le mouvement du train est sinusoidal. Déterminer sa pulsation w ainsi que le temps mis pour aller du point L au point P sans vitesse initiale.
On donne : $g = 9.8 m/s^2$ et $R_T = 6400$ Km

Série 5

Ex 1

P.F.D $\Rightarrow m.\vec{\gamma}_r = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c$

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F}$ (R' est en Rotation / R a $\Rightarrow$ R' est ingaliléen)

$\vec{\gamma}_e = ?$

$\vec{OM} = r\,\vec{e}_{x'}$

$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{\circ}(O') + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{O'M})$

$= \omega\vec{e}_z \wedge (\omega\vec{e}_z \wedge r\vec{e}_{x'})$

$= \omega\vec{e}_z \wedge (\omega r\,\vec{e}_{y'})$

$= -\omega^2 r\,e_{x'}$

$\vec{\gamma}_c = ?$

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{r}\wedge\vec{V}_r$

$\vec{V}_r = \dot{r}\,\vec{e}_{x'}$

$\vec{\gamma}_c = 2\omega\vec{e}_z \wedge \dot{r}\vec{e}_{x'}$

$= 2\omega\dot{r}\,\vec{e}_{y'} \Rightarrow \vec{\gamma}_c = 2\omega\dot{r}\,\vec{e}_{y'}$

$= 2\omega^2 r_0 \, sh\,\omega t\,\vec{e}_{y'}$

$\vec{\gamma}_r = ?$

$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2} = \ddot{r}\,\vec{e}_{x'}$

OM = r

$\vec{F} = m\vec{\gamma}_r - \vec{P} + m\vec{\gamma}_e + m\vec{\gamma}_c$

t.q : $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$

$\vec{F} = \ddot{r}\,\vec{e}_{x'} - \omega^2 r\,\vec{e}_{x'} + 2m\omega\dot{r}\,\vec{e}_{y'} + m.g\,\vec{e}_z$

$= (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\vec{e}_{x'} + 2m\omega\dot{r}\,\vec{e}_{y'} + mg\,\vec{e}_z$

Conclure ?

on a : $r = r_0\, ch\theta$

$\dot{r} = r_0\,\omega\, sh\,\omega t$

$\ddot{r} = r_0\,\omega^2\, ch\,\omega t = \omega^2 r$

Donc : $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$

Alors : $\vec{F}$ est dirigé suivant $\vec{e}_{y'}$ et $\vec{e}_{z'}$



2) . $P_{\vec{F}/R} = \vec{F} \cdot \vec{V}_R(M)$

$\vec{F} = F_{y'} \vec{e}_{y'} + F_{z'} \vec{e}_{z'}$
$\vec{V}_R = \dot{r} \vec{e}_{x'} + r\dot{\theta} \vec{e}_{y'}$
$P_{\vec{F}/R} = F_{y'} r\dot{\theta} \neq 0$

$\vec{P} = -mg \vec{e}_z \Rightarrow P_{\vec{P}/R} = \vec{P} \cdot \vec{V}_R(M)$
$= 0 \quad (\vec{P} \perp (\vec{e}_{y'}, \vec{e}_{x'})$

3) . $P(\vec{F}/R') = \vec{F} \cdot \vec{V}_{R'}(M)$

$= (F_{y'} \cdot \vec{e}_{y'} + F_{z'} \cdot \vec{e}_{z'}) \cdot \dot{r} \vec{e}$
$= 0$

Ex2 .

+ $\underset{A \to B}{\Delta} E_c = \sum W(\vec{F}_{ext})$

$\vec{F}_{ext} = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N \\ \vec{P} \end{cases}$

$\Rightarrow E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$
$(\vec{R}_T \perp$ depl$)$

or : $W(\vec{R}_N) = 0$ et $E_{C_A} = 0 \quad (V_A = 0)$

$\Rightarrow W(\vec{R}_T) = E_{C_B} - W(\vec{P})$

le poid $\vec{P}$ est une force conservative

$\Rightarrow \Delta E_{P_P} = -W(\vec{P})$

$W(\vec{P}) = -(E_{P_{P_B}} - E_{P_{P_A}}) = -mgh$

$\Rightarrow W(\vec{R}_T) = \frac{1}{2} m V_B^2 - mgh$

A.N : $= \frac{1}{2} . 5 . (10)^2 - 5.(10).10$

$W(\vec{R}_T) = -250 \text{ J}$

$W(\vec{R}_T) < 0 \Rightarrow \vec{R}_T$ est une force resistante.

2) . $\underset{B \to C}{\Delta} E_c = \underset{B \to C}{\sum} W(\vec{F}_{ext})$

$= \underset{B \to C}{W}(\vec{P}) + \underset{B \to C}{W}(\vec{R}_N) + \underset{B \to C}{W}(\vec{R}_T)$

on a $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ perpendiculaire au déplacement

$\Leftrightarrow \underset{0}{E_{C_C}} - E_{C_B} = {}_{B\to C}W(\vec{R_T})$

$\Leftrightarrow {}_{B\to C}W(\vec{R_T}) = -E_{C_B} = -\frac{1}{2} m V_B^2$
$= -250\ J$

3). On a : $K = \frac{R_T}{R_N}$

d'après le P.F.D on a :
$\vec{P} + \vec{R_T} + \vec{R_N} = m\vec{\gamma}$
(sur l'axe (OY) on $\vec{\gamma} = 0$)
$\Rightarrow -mg + R_N = 0 \Rightarrow R_N = mg = 50\ N$
On a : ${}_{O\to C}W(R_T) = \vec{R_T} \cdot \vec{BC}$
$= R_T \cdot BC \cos\pi = -R_T \cdot BC$
$\Rightarrow R_T = \frac{{}_{B\to C}W(\vec{R_T})}{BC} = 25\ N$

$\Rightarrow K = \frac{R_T}{R_N} = \frac{25}{50} = 0{,}5$

b). On suppose que le corps s'arrête en M . Donc $V_M = 0$

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F_{ext}})$
$\underset{0}{E_{C_M}} - E_{C_B} = W(\vec{P}) + W(\vec{R_T}) + \underset{0}{W(\vec{R_N})}$

$W(\vec{P}) = -mg\cos\theta \cdot BM$
$W(\vec{R_T}) = -R_T \cdot BM$
donc $= \frac{1}{2} \cdot m V_B^2 = -mg\cos\theta\, BM - R_T BM$
$= E_{C_B}$

$BM = \frac{-E_{C_B}}{-mg\cos\theta - R_T}$, $K = \frac{R_T}{R_N}$

la projection de P.F.D sur la normale.
$\Rightarrow R_T = P$
$R_T = mg\cos\theta$

$V = V(S) = ?$

d'après le T.E.C :

$$\Delta E_c = \Sigma W(\vec{F})$$

$$\Rightarrow E_{C_S} - E_{C_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R_N})$$ ($W(\vec{R_N}) = 0$)

$$\frac{1}{2} m V_S^2 = W(\vec{P}) = -\Delta E_P$$

$$= -mga + mgh = mg(h-a)$$

$$V_S^2 = 2g(h-a)$$

donc : $R_N = -m \cdot \frac{2g(h-a)}{R} + mg$

Il faut que $R_N > 0$ pour que le chariot ne quitte pas la piste.

$$\Rightarrow R_N = \frac{-mg(h-a) 8\pi^2 a}{l^2} + mg$$

$$\Rightarrow R_N = mg\left(1 - \frac{(h-a)}{l^2} 8\pi^2 a\right)$$

$$R_N > 0 \Rightarrow 1 - \frac{(h-a)}{l^2} 8\pi^2 a > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(h-a)}{l^2} 8\pi^2 a < 1$$

$$\Rightarrow h < \frac{l^2}{8\pi^2 a} + a$$

EX5 :

1/- $W_{A\to B}(\vec{F})$ sur l'axe (OX) $\left(W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}\right.$

on a : $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

on a : $\vec{F} = k\left[(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}\right]$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

on a : $y = 0$

Alors : $\vec{F} = k\left[x\vec{i} + x\vec{j}\right]$

$= xk(\vec{i} + \vec{j})$

$\vec{OM} = x\vec{i}$

$\Leftrightarrow \underset{0}{E_{c_C}} - E_{c_B} = \underset{B\to C}{W}(\vec{R_T})$

$\Leftrightarrow \underset{B\to C}{W}(\vec{R_T}) = -E_{c_B} = -\frac{1}{2} m V_B^2$
$= -250 J$

3) - On a : $k = \frac{R_T}{R_N}$

d'après le P.F.D on a :
$\vec{P} + \vec{R_T} + \vec{R_N} = m\vec{\gamma}$
(sur l'axe (OY) on $\vec{\gamma} = 0$)
$\Rightarrow -mg + R_N = 0 \Rightarrow R_N = mg = 50 N$
On a : $\underset{O\to C}{W}(R_T) = \vec{R_T} \cdot \vec{BC}$
$= R_T \cdot BC \cos\pi = -R_T \cdot BC$
$\Rightarrow R_T = \frac{\underset{B\to C}{W}(\vec{R_T})}{BC} = 25 N$

$\Rightarrow k = \frac{R_T}{R_N} = \frac{25}{50} = 0,5$

b) - On suppose que le corps s'arrête en M . Donc $V_M = 0$

$\Delta E_c = \Sigma W(\vec{F_{ext}})$
$\underset{0}{E_{c_M}} - E_{c_B} = W(\vec{P}) + W(\vec{R_T}) + \underset{0}{W(\vec{R_N})}$

$W(\vec{P}) = -mg\cos\theta . BM$
$W(\vec{R_T}) = -R_T . BM$
donc $= \frac{1}{2} . m V_B^2 = -mg\cos\theta BM - R_T BM$
$= E_{c_B}$
$BM = \frac{-E_{c_B}}{-mg\cos\theta - R_T}$, $k = \frac{R_T}{R_N}$

la projection de P.F.D sur la normale.
$\Rightarrow R_T = P$
$R_T = mg\cos\theta$

$$BM = \frac{-E_{c_B}}{-m.g\cos\theta - mg\cos\theta K}$$

$$BM = \frac{\frac{1}{2}.m.V_B^2}{mg\cos\theta + mgK\cos\theta}$$

A.N : $BM = 5,35$ m

EX;3

1) - a/ - $\Delta E_c = \sum W_{A\to B}(\vec{F})$

$E_1 - E_0 = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R_N})$

$E_0 = 0$; $W(\vec{R_N}) = 0$

$\frac{1}{2} m V_1^2 = m g z_0$

$V_1 = \sqrt{2 z_0 g}$

b/ - $\Delta E_c = \sum W_{M_1\to M}(\vec{F})$

$E_{cM} - E_{c_1} = W_{M_1\to M_2}(\vec{R}) + W_{M_1\to M_2}(\vec{P})$

$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = -\Delta E_p = -(E_{p_{M_1}} - E_{p_{M_0}})$

$\Rightarrow z = R(1 - \cos\theta)$ Donc:

$V^2 = 2gR(1-\cos\theta) + V^2$

$$V = \sqrt{2gR(1-\cos\theta) + 2z_0 g}$$

$$V = \sqrt{2g(z_0 - R(1-\cos\theta)}$$

2/- a PFD/R_g :

$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{\gamma}$

$= m(\gamma_T \vec{e_t} + \gamma_N \vec{e_N})$

Projection de PFD :

$\vec{P}.\vec{e_n} = mg\cos(\pi - \theta)$

$\vec{R} = R_N.\vec{e_n} \Rightarrow \vec{R}.\vec{e_n} = R_N$

$m.g.\cos(\pi - \theta) + R_N = m\gamma_n$

$-mg\cos\theta + R_N = \frac{mv^2}{R}$

$$R_N = m.\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta$$

$$= m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

$$= m\left(\frac{2g(z_0 - R(1-\cos\theta))}{R}\right) + mg\cos\theta$$

$$= mg\left(\frac{2z_0}{R} - 2 + 3\cos\theta\right)$$

b/- R_N s'annule et $\theta = \pi$

$\Rightarrow \cos\theta = -1$

$\Rightarrow \frac{2z_0}{R} - 2 - 3 = 0$

$\Rightarrow z_0 = \frac{5}{2}R$

3/- Le th. du moment cinetique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(M)}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_0(\vec{F}) = \mathcal{M}_0(\vec{P}) + \mathcal{M}_0(\vec{R})$$

~~Or α < ½~~

et $\mathcal{M}_0(\vec{R}) = (-R.\vec{e_n}) \wedge (R_N.\vec{e_n})$
$= 0$

$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \mathcal{M}(\vec{P})$

$\Rightarrow$ donc le th. ne peut pas répondre à la question (on ne peut pas determiner $\vec{R}$)

EX:4

on a : $\Sigma\vec{F} = m\vec{\gamma}$

$\vec{R_N} + \vec{P} = m\vec{\gamma}$

$R_N - mg = m\gamma_y = m\gamma_N = -m.\frac{V^2}{R}$

$-R_N + mg = m\frac{V^2}{R}$

$R_N = mg - m\frac{V^2}{R}$

$V = V(S) = ?$

d'après le T.E.C :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$$

$\Rightarrow E_{c_S} - E_{c_A} = W(\vec{P}) + W(\vec{R_N})$ (= 0)

$\frac{1}{2} m V_S^2 = W(\vec{P}) = -\Delta E_p$

$= -mga + mgh = mg(h-a)$

$V_S^2 = 2g(h-a)$

donc : $R_N = -m \cdot \frac{2g(h-a)}{R} + mg$

Il faut que $R_N > 0$ pour que le chariot ne quitte pas la piste.

$\Rightarrow R_N = \frac{-mg(h-a) 8\pi^2 a}{l^2} + mg$

$\Rightarrow R_N = mg\left(1 - \frac{(h-a)}{l^2} 8\pi^2 a\right)$

$R_N > 0 \Rightarrow 1 - \frac{(h-a)}{l^2} 8\pi^2 a > 0$

$\Rightarrow \frac{(h-a)}{l^2} 8\pi^2 a < 1$

$\Rightarrow h < \frac{l^2}{8\pi^2 a} + a$

EX5 :

1/- $W_{A\to B}(\vec{F})$ sur l'axe (OX) $\left(W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}\right.$

on a : $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

on a : $\vec{F} = k\left[(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}\right]$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

on a : $y = 0$

Alors : $\vec{F} = k\left[x\vec{i} + x\vec{j}\right]$

$= xk(\vec{i} + \vec{j})$

$\vec{OM} = x\vec{i}$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{-R}^{R} kx\, dx = k\int_{-R}^{R} x\, dx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = k\left(\frac{R^2}{2} - \left(\frac{R^2}{2}\right)\right) = 0$$

2/- on a : $\vec{F} = k\left[(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}\right]$

On a : $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$

$$\Rightarrow \vec{F} = k\left[(R\cos\theta + R\sin\theta)\vec{i} + (R\cos\theta - R\sin\theta)\vec{j}\right]$$

$$= F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

b/- on a : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$= R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = -R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{j}$$

c/- $\delta W = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{OM}}{d\theta}\cdot d\theta$

$$= (F_x\vec{i} + F_y\vec{j})(-R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{j})$$

$$\delta W = (-F_x R\sin\theta + F_y R\cos\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow \delta W = kR^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta)\, d\theta$$

d/- $W_{A\to B} = \int_{AB} \delta W = \int f(\theta)\cdot d\theta$

$$W_{A\to B} = \int kR^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta)\, d\theta$$

$$= kR^2\int_0^{\pi}(\cos(2\theta) - \sin(2\theta))\, d\theta$$

$$= kR^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= kR^2\left(\frac{\sin 2\pi}{2} + \frac{\cos 2\pi}{2} - \frac{\sin(0)}{2} - \frac{\cos(0)}{2}\right)$$

$$= 0$$

Le travail ne dépend pas du trajets

$$\vec{F} = -\vec{grad}\,(E_p(x,y))$$
$$= -\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y=cste}\vec{i} - \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x=cste}\vec{j}$$
$$= k(x+y)\,\vec{i} + k(x-y)\,\vec{j}$$
$$\Rightarrow \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y=cste} = -k(x+y)$$
$$\Rightarrow E_p(x,y) = -k\,.\frac{x^2}{2} - kxy + f(y)$$

$f(y)$ est la fonction à déterminer

Or : $$\left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x=cste} = -kx + \frac{df(y)}{dy}$$
$$= -k(x-y)$$
$$\Rightarrow \frac{df(y)}{dy} = ky$$
$$\Rightarrow f(y) = k\,.\frac{y^2}{2} + C$$
$$\Rightarrow E_p(x,y) = -k\frac{x^2}{2} + \frac{ky^2}{2} - kxy + C$$

Ep est toujours déterminée à une cste près

EX6 :

1) l'equation de la trajectoire :

on a :

$$\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{Equation d'une éllipse}$$



2)- l'energie cinetique :

on a : $E_c = \frac{1}{2} m V^2$

on a : $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{V} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$

$V^2 = (a\omega)^2\sin^2\omega t + (b\omega)^2\cos^2\omega t$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)$

3)- On Mq : $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$

P.F.D : $\Sigma F_{ext} = m\vec{\gamma} = \vec{F}$

on a : $\vec{V} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$

donc : $\vec{\gamma} = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{\gamma} = -\omega^2\vec{r}$

par suite : $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$

4)- On Mq : $W_{A\to B} = m\omega^2$

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$= -m\omega^2\vec{r}\cdot d\vec{r}$

$= -m\omega^2 r\cdot dr$

$\Rightarrow W = \int_a^b -m\omega^2 r\cdot dr$

$= -m\omega^2\int_a^b r\cdot dr$

$= -m\omega^2\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^b$

$= \frac{m\omega^2}{2}(a^2 - b^2)$

Démo: $\vec{r}d\vec{r} = dt\,\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$

$= \frac{1}{2}dt\frac{d\vec{r}^2}{dt^2}$

$= \frac{1}{2}\,2.r.dr$

$= r.dr$

5)- $\Delta E_c = W_{A\to B}(\vec{F})$

$\Delta_{A\to B} E_c = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$

$\vartheta = \frac{dr}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$



$v^2 = (a\omega \sin\omega t)^2 + (b\omega \cos\omega t)^2$

$V_A = b^2\omega^2$ et $V_B = a^2\omega^2$

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 - \frac{1}{2} m b^2 \omega^2$

$= \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2)$

$\vec{F} = -\vec{grad}\, u$

$= -m\omega^2 \vec{r}$

$u = -\int \vec{F} . \vec{dr}$

$= -\int -m\omega^2 \vec{r} . \vec{dr}$

$= m\omega^2 \int \vec{r} . \vec{dr} = m\omega^2 \int r . dr$

$= \frac{m\omega^2 r^2}{2} + cte$

$E_m = E_c + u$

Pour que E_m soit constante, Il faut que la dérivée soit nulle.

$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2\omega t + b^2 \cos^2 \omega t)$

$= \frac{m\omega^2}{2} (a^2 \cos^2\omega t + b^2 \sin^2 \omega t)$

$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2\omega t + b^2 \cos^2 \omega t)$

$U = \frac{m\omega^2}{2} (a^2 \cos^2\omega t + b^2 \sin^2 \omega t) + cte$

$E_m = (a^2 + b^2) \frac{m\omega^2}{2} + cte$

$E_m = cte$

Exercice 7 :

1) $\vec{F} = -G . \frac{M_T}{r^2} . m \vec{e_r}$

$g = G . \frac{M_T}{R_T^2}$ $\quad (\vec{CM} = r . \vec{e_r})$

On a : $\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_r}{V_r}$

$$M_r = M_T \cdot \frac{V_r}{V_T} = M_T \cdot \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot r^3}{\frac{4\pi}{3} \cdot R_T^3}$$

$$= M_T \cdot \frac{r^3}{R_T^3}$$

donc : $\vec{F} = -G \cdot \frac{r^3}{R_T^3} \cdot M_T \cdot m \, \vec{e_r}$

$$= -g \cdot \frac{r \cdot m}{R_T} \cdot \vec{e_r}$$

2) - $dw = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

$d\vec{OM} = dOM \cdot \vec{e_x}$

$= dx \cdot \vec{e_x}$

$$dw = -mg \cdot \frac{r}{R_T} \vec{e_r} \cdot dx \, \vec{e_x}$$

$$= -mg \cdot \frac{r}{R_T} dx (\vec{e_r} \cdot \vec{e_x})$$

$$= -mg \frac{r}{R_T} dx \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \vec{OM} = r\vec{e_r}$$

$$= -\frac{mgr}{R_T} \sin\theta \, dx$$

$r\sin\theta = x$

$$dw = -\frac{mg}{R_T} x \, dx$$

$$dE_p(\vec{F}) = -dw(\vec{F})$$

$$= \frac{mg}{R_T} \cdot x \cdot dx$$

$$E_p(\vec{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg}{R_T} x^2 + cte$$

$E_p(t=0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

donc : $E_p = \frac{mg}{2R_T} x^2$

3) On sait que :

$E_m = E_c + E_p$

$= \frac{1}{2} m\dot{x} + \frac{mg}{2R_T} \cdot x^2$

On a : $E_m = cte$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mg}{R_T} x.\dot{x} = 0$

$\Leftrightarrow \dot{x}m(\ddot{x} + \frac{g}{R_T} x) = 0$

alors : $\ddot{x} + \frac{g}{R_T} x = 0$

$\omega^2 = \frac{g}{R_T}$

Eq. caract. : $r^2 + \omega^2 = 0$ $\vec{OL} =$

$\Leftrightarrow r^2 = (i\omega)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = i\omega \\ r_2 = -i\omega \end{cases}$

$r(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

à $t=0$ $x(0) = -a$ (le train fait son départ du pt L)

$\Leftrightarrow A = -a$

$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\cos\omega t$

$\dot{x}(0) = 0$

$\Rightarrow B = 0$

$x(t) = -a\cos\omega t$ $\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$

en P : $x_p(t_p) = a$

$-a\cos(\omega t_p) = a$

$\cos(\omega t_p) = -1$

$\omega t_p = \pi$

$\frac{2\pi}{T} \cdot t_p = \pi$

$\Rightarrow t_p = \frac{T}{2}$